جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

كلية العلوم الدقيقة
قسم الفيزياء

محاضرات في الاهتزازات و الأمواج الميكانيكية

موجهة لطلبة سنة ثانية ليسانس - فيزياء -

من إعداد : د. عسكري سهيلة

Email :askrisouha@gmail.com
askri-souhaila@univ-eloued.dz

السنةالجامعية 2023/2022

المحتويات

معلومات عن المقياس

مقياس: الاهتزازات والأمواج

ينتمي هذا المقياس للوحدة الأساسية. موجه لطلبة السنة ثانية فيزياء ليسانس. يقدم في السداسي الثالث بحجم ساعي ثلاث ساعات منها ساعة ونصف درس و ساعة ونصف أعمال توجيهية.

أهداف تدريس مقياس: الاهتزازات والأمواج

من أهم أسباب دراسة الاهتزازات والأمواج مايلي:

- دراسة حركات الأنظمة الديناميكية.
- دراسة حركات الأنظمة الديناميكية ذات درجة حرية واحدة و درجتي حرية وايجاد التواترات الزاوية وأنماط الحركة باشتقاق المعادلات التفاضلية وحلها.
- دراسة العلاقة بين الأنظمة الكهربائية والميكانيكية باستعمال التماثل الكهروميكانيكي.
- دراسة الأمواج الميكانيكية في وسط مادي.

المعارف السابقة الموصى بها:

الاعتماد على المعارف المكتسبة من سنوات التكوين سابقا ونخص بالذكر المبادئ الأساسية لعلم الميكانيك والكهرباء، ومفاهيم تذبذب الأجسام الديناميكية أو ذرات الأجسام الصلبة أو ذرات الجزيئات حول وضع اتزانها.

محتوى المقياس:

يحتوي هذا الدرس على مدخل عام وجزئين أساسين يشمل كل منهما فصول كمايلي:

- مدخل عام
- الجزء الأول : الاهتزازات
  - عموميات عن الاهتزازات الميكانيكية
  - الهزاز الحر
  - الهزاز المتخامد
  - الهزاز القسري
  - طريقة لاغرانج و أنظمة ذو درجتي حرية
- الجزء الثاني : الأمواج الميكانيكية
  - الأمواج المنتشرة
  - الأمواج المستقرة

مدخل عام

مدخل عام

يتعرض هذا الدرس لدراسة محورين أساسين، المحور الأول دراسة الاهتزازات ويقصد بها انتشار للحركات الذبذبية لأي نظام ديناميكي حول وضعية توازنه بصفة دورية أي حركات تتكرر خلال زمن معين أو بصفة شبه دورية، وهذه الاهتزازات تكون حرة أو تحت تأثير قوة خارجية بوجود أو غياب ضياع في الطاقة ناتج عن الاحتكاك أو التخامد، وللحصول على المعادلات التفاضلية للحركات الاهتزازية تستعمل عدة طرق منها طريقة نيوتن ، طريقة الطاقة و طريقة لاغرانج، إذ تعتبر طريقة لاغرنج الطريقة الأنسب لإيجاد التواترات الزاوية والأنماط الطبيعية لحركة الأنظمة الديناميكية سواء كانت ذات درجة حرية واحدة أو متعددة درجات الحرية. وفي دراسة الاهتزازات يسهل التماثل الكهروميكانيكي في فهم و تبسيط المسائل المعقدة الناتجة عن حركة الأنظمة الميكانيكية التي يصعب تركيبها مقارنة بالأنظمة الكهربائية التي يسهل تركيبها في المخبر وهو مايساعد الطالب على استيعاب المفاهيم النظرية والتطبيقية.

أما المحور الثاني لهذا الدرس فيتطرق لدراسة الأمواج الميكانيكية وهي عبارة عن اضطراب في اتجاه معين وبسرعة معينة للجزيئات في الوسط المادي ، أي حركة اهتزازية في الوسط تنتقل بصورة مرنة من جزيء لآخر بشكل متعاقب بفعل التأثير المتبادل بين جزيئات الوسط.

الجزء I

الاهتزازات

الفصل 1

عموميات عن الاهتزازات الميكانيكية

1.1 الاهتزازات الميكانيكية

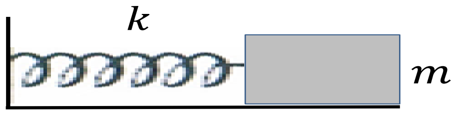
الاهتزازات وهي ظاهرة فيزيائية تطلق على كل انتشار للحركات الذبذبية حول نقطة التوازن كان طوليا او عرضيا ،و هذا الانتشار يكون في الأوساط المرنة. هذه الحركات الذبذبية قد تكون بصورة دورية أي تكرر نفس الحركة خلال زمن معين مثل: - نواس الساعات الجدارية - دوران الأرض حول الشمس - كتلة معلقة بنابض - الذرات في الشبكة البلورية. وقد تكون أيضا بصورة شبه دورية أين تتناقص أو تتخامد حركتها خلال فترة زمنية مثل : - الأرجوحة - أجنحة الطائرة - المحركات الكهربائية. الاهتزازات أحيانا يكون مرغوب فيها كمبكر الصوت الذي يضاعف اهتزازات الصوت، في حين أن أغلب الأحيان تكون الاهتزازات غير مرغوب فيها بسبب الضوضاء وإهدار الطاقة كالأصوات الصادرة عن المحركات الكهربائية...إلخ.

2.1 الحركة التوافقية البسيطة

إن الحركة التوافقية البسيطة هي حركة اهتزازية ومن أبسط أشكال الحركة الدورية على الإطلاق وهذه الحركة التي يصنعها جسم مهتز ذهابا وإيابا على جانبي موضع الاتزان بدون سرعة ابتدائية على طول خط مستقيم يتناسب فيها مقدار قوة الإرجاع طرديا مع مقدار إزاحة الجسم عن موضع الاتزان، ويكون اتجاهها بعكس اتجاه الإزاحة.

<u>مثال</u> :

نعتبر كتلة m معلقة بنابض ثابت مرونته k.



شكل 1.1: هزاز مروني

تعتبر حركة الهزاز المروني البسيط حركة توافقية بسيطة.

3.1 المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة

من المثال السابق (الشكل 1.1) إذا أزيحت الكتلة يمينا أو يسارا تتولد في النابض قوة إرجاع اتجاهها عكس اتجاه القوة الخارجية.
حسب قانون هوك

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

ووفق قانون نيوتن $\vec{F} = m\vec{a}$ نجد:

$$-k\vec{x} = m\vec{a}$$
$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow -kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.1}$$

المعادلة (1.1) توافق المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.1}$$

حيث أن المعادلة (2.1) تكافئ المعادلة التفاضلية الآتية من أجل الاحداثية المعممة $q(x, y, z, \theta, \varphi)$.

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{3.1}$$

إذن رياضيا يعبر عن الحركة التوافقية البسيطة بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

4.1 خصائص الحركة التوافقية البسيطة

يعبر عن الحل الرياضي للمعادلة (2.1) بالحلول الجيبية التالية :

$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \varphi)$$
$$x(t) = A\sin(\omega t \pm \varphi)$$
$$x(t) = A\cos(\omega t \pm \varphi) + B\sin(\omega t \pm \varphi)$$
$$x(t) = Ae^{i(\omega t \pm \varphi)} + Be^{-i(\omega t \pm \varphi)}$$

حيث :

x إزاحة الحركة وهي بعد الجسم المهتز في أية لحظة عن موضع اتزانه وحدتها m.

A سعة الاهتزاز وهي أقصى إزاحة يصل لها الجسم المهتز عن وضع الاتزان وحدتها m.

φ الطور الابتدائي للحركة(t=0).

ϕ طور الحركة الاهتزازية $(\phi = \omega t \pm \varphi)$.

و للحركة التوافقية البسيطة خصائص أهمها:

1.4.1 النبض ω (السرعة الزاوية)

وهو مقدار الزاوية التي يمسحها نصف القطر في الثانية الواحدة وحدته (rad/s) .

2.4.1 الدور T

وهو الزمن اللازم لجسيم لإنجازه اهتزازة كاملة وحدته s.

3.4.1 التردد f

وهو عدد الاهتزازات الكاملة التي ينجزها الجسم في وحدة الزمن أي مقلوب زمن الدور وحدته $Hz = s^{-1}$ ، و يعطى بالعلاقة التالية :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

سلسلة الفصل الأول

التمرين الأول:

نعتبر كتلة $m = 500g$ معلقة بنابض مهمل الوزن تنجز حركة توافقية بسيطة إذا كانت الإزاحة تعطى بالعلاقة : $x(t) = A\sin\ \omega t$ اذا علمت ان هذه الكتلة تجري 30 دورة في 90 ثانية وأن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

أحسب :

1. دور الاهتزازات T.
2. التوتر الزاوي (النبض) للاهتزازات ω.
3. ثابت المرونة k.
4. بإعطاء سعة الاهتزاز القيمة $A = 2mm$ ، أرسم مخطط الازاحة.

التمرين الثاني:

يعطى اهتزاز نقطة ما بالمعادلة التالية : $x(t) = 20\sin\ \left(15.7t + \frac{\pi}{4}\right)$ أوجد :

1. سعتها.
2. تواترها ودورها.
3. طورها في اللحظة $t = \pi/4$.
4. مقدار انزياح هذه النقطة وذلك بفرض أن x تقدر بـ cm.

التمرين الثالث:

جسم يهتز بحركة توافقية بسيطة على المحور، موضعه يتغير بالنسبة للزمن وفقا للمعادلة الآتية:

$$x(t) = 5\cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right)$$

حيث يقدر الزمن بالثانية والزاوية بالراديان والإزاحة بالمتر.

1. حدد سعة وتردد والزمن الدوري لحركة هذا الجسم.
2. أوجد سرعة وتسارع الجسم عند أي زمن.

3. أوجد الطور الابتدائي.

4. أوجد الإزاحة و السرعة والتسارع في اللحظة $t = 0s$ و $t = 0.5s$.

5. أوجد السرعة الأعظمية والتسارع الأعظمي.

التمرين الرابع:

علق نابض خفيف كتلته $50g$ فاستطال بمقدار $10cm$، أحسب دور وتواتر الاهتزازات الصغيرة للكتلة عند إزاحتها عن موضع توازنها مع العلم أن ثابت مرونته $k = 5N/m$ ثم استنتج قيمة التسارع الأعظمي.

التمرين الخامس:

حركة توافقية بسيطة لهزاز حر تعطى بالعبارة التالية:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

في حالة الشروط الابتدائية لدينا: $x(0) = A_0$ و $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

1. أوجد عبارة السعة و الطور لهذه الحركة بدلالة السعة الابتدائية والسرعة الابتدائية والنبض الطبيعي للحركة.

2. أكتب عبارة $x(t)$ من الشكل $x(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ ثم حدد الثوابت B و C.

الفصل 2

الهزاز الحر

1.2 الهزاز الحر (الهزاز التوافقي)

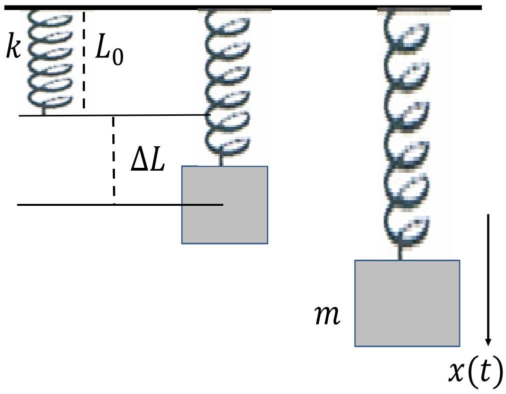
نعرف الهزاز الحر بتلك الاهتزازات الحرة الناتجة عن إزاحة الجملة عن وضع اتزانها أو اكسابها سرعة ابتدائية ثم تركها تتذبذب بصفة حرة أي دون تأثير قوى خارجية (بغياب الاحتكاك او التخامد)، وسنهتم خلال دراستنا هذه بالتطرق إلى جمل محافظة لا يكون فيها فقدان للطاقة.

2.2 معادلة الحركة للهزاز الحر

لايجاد المعادلة المميزة لحركة الهزاز الحر هناك عدة طرق منها : ـ طريقة نيوتن ـ طريقة الطاقة ـ طريقة لاغرانج و التي سنهتم بدراستها في الفصل (5).

1.2.2 طريقة نيوتن

تعتمد هذه الطريقة على القانون الثاني للتحريك لنيوتن.
نعتبر نظام ميكانيكي مكون من كتلة m معلقة بنابض ثابت مرونته k طوله الابتدائي L_0 و استطالته ΔL تحت تأثير وزن الكتلة.



شكل 1.2: هزاز مروني

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نجد:

<u>في حالة السكون</u>

$$\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0 \tag{1.2}$$

$$mg - k(L_0 + \Delta L) = 0$$
$$mg = k(L_0 + \Delta L) \tag{2.2}$$

<u>في حالة الحركة</u>

$$\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_3} = m\vec{a} \tag{3.2}$$

$$mg - k((L_0 + \Delta L) + x) = m\ddot{x}$$
$$\underbrace{(mg - k(L_0 + \Delta L))}_{=0} - kx = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4.2}$$

إذن المعادلة (4.2) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (3.1) للحركة التوافقية البسيطة.

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

وبمطابقة المعادلتين (4.2) و (3.1) نجد:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0}$$

حيث ω_0 هو النبض الطبيعي لحركة الهزاز الحر (التوافقي).

2.2.2 طريقة الطاقة

تعتمد هذه الطريقة على قانون مبدأ انحفاظ الطاقة.
تعطى العبارة العامة للطاقة الكلية كالتالي:

$$E = T + U \tag{5.2}$$

حيث : T الطاقة الحركية.
U الطاقة الكامنة.

1.2.2.2 الطاقة الحركية

في حالة نظام مكون من كتلة m و موضع محدد بالاحداثية المعممة $q(x, y, z, \theta, \varphi)$ فإن الطاقة الحركية تكتب على النحو التالي :
$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$
<u>مثال:</u>
- حالة نواس مروني : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
- حالة نواس ثقالي : $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

2.2.2.2 الطاقة الكامنة

استنادا إلى قانون هوك و الذي ينص على أن أي قوة مطبقة من طرف نابض ثابت مرونته k على كتلة m مجبرة على الحركة وفق المحور x مثلا، ومنه تعطى عبارة القوة بـ $F = -kx$، ويمكن أن نكتب الطاقة الكامنة على النحو التالي:

$$U(x) = -\int_0^x F dx = -\int_0^x -kx dx$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6.2}$$

بصفة عامة من أجل الاحداثية المعممة q نعتبر جملة كيفية محافظة طاقتها الكامنة $U(q)$ عندما تكون الإزاحات عن وضعية التوازن صغيرة، من الممكن أن نقوم بنشر تايلور لـ $U(q)$ بجوار وضع التوازن $q=0$ و باهمال الأس الأكبر من 2 نحصل على:

$$U(q) = U(0) + \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=0} q + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0} q^2 \qquad (7.2)$$

إذا اخترنا مبدأ الطاقات الكامنة هو وضعية التوازن فإن $(U(0)=0)$، ومن أجل $U(q)$ أصغرية عند $q=0$ فإن $\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=0} = 0}$ وهو ما يسمى شرط الاهتزاز.
ومنه فالطاقة الكامنة تكتب من الشكل:

$$U(q) = \frac{1}{2} b_0 q^2 \qquad (8.2)$$

حيث $b_0 = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0}$ و هو ثابت يكافئ ثابت المرونة k .

3.2.2.2 المعادلة التفاضلية

نعتبر نفس النظام الميكانيكي المدروس في (1.2.2).
باستعمال مبدأ انحفاظ الطاقة إذ يبقى مقدار الطاقة الكلية ثابتا في أية لحظة للنظام.

$$E = T + U = cste \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0 \qquad (9.2)$$

لدينا:
$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ و $U = \frac{1}{2} kx^2$
ومنه

$$\begin{aligned}
(2.9) \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} kx^2\right] \\
&= \left[\frac{1}{2} m\big(2\dot{x}\ddot{x}\big)\right] + \left[\frac{1}{2} k\big(2\dot{x}x\big)\right] \\
&= \dot{x}\big(m\ddot{x} + kx\big) = 0 \qquad (10.2)
\end{aligned}$$

وعليه نجد:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (11.2)$$

المعادلة (11.2) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (3.1) للحركة التوافقية البسيطة. حيث $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ هو النبض الطبيعي لحركة الهزاز الحر (التوافقي).

4.2.2.2 طاقة الهزاز الحر

إن الحل الرياضي للهزاز الحر كما عرفناه فيما سبق (4.1) يعطى كالتالي:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

ومنه

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \qquad (12.2)$$
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

ونعلم أيضا أن $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ &= \left[\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\right] \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \underbrace{\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right]}_{=1} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \underbrace{\left[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right]}_{=1} \end{aligned}$$

ومنه نجد طاقة الهزاز الحر

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = cste}$$

وهي طاقة دائما محفوظة.

سلسلة الفصل الثاني

التمرين الأول:

تقوم كتلة بحركة اهتزازية بسيطة عند نهاية نابض خفيف (مهمل الوزن).

1. أحسب نسبة الطاقة الكامنة وكذا الحركية من الطاقة الكلية عندما تكون الإزاحة تساوي نصف السعة الكلية للحركة.

2. إذا تضاعفت سعة الحركة ما الذي يتغير في الطاقة الكلية، السرعة القصوى و التسارع الأقصى.

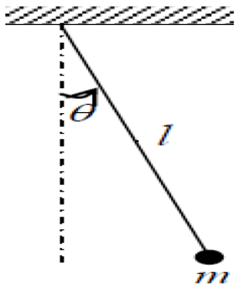
3. هل يتغير دور الاهتزازات تبعا لذلك.

التمرين الثاني:

نعتبر نواس ثقالي بسيط متكون من كتلة m مربوطة بخيط طوله l و مهمل الكتلة.

1. أوجد النبض الطبيعي للحركة باستعمال طريقة نيوتن و الطاقة.

2. اثبت أن طاقة هذا النواس قيمة ثابتة.

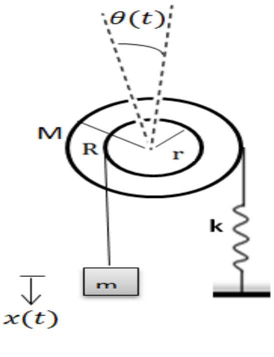


الشكل 1

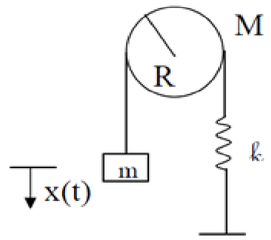
التمرين الثالث:

أوجد النبض الطبيعي للحركة للنظام الميكانيكي المبين في الشكل (2)، حيث M كتلة البكرة التي تدور حول مركزها.

نفس السؤال من أجل النظام الميكانيكي المبين في الشكل (3) حيث تتعلق الكتلة m بنهاية خيط متصل ببكرة ذو قطرين مترابطين كتلته M وعزم عطالته J.



شكل 3



شكل 2

الفصل 3

الهزاز المتخامد

1.3 مقدمة

خلال دراستنا للفصل السابق (2) لم نأخذ الحقائق الفيزيائية بعين الاعتبار بحيث أهملنا قوى الاحتكاك التي تتسبب في فقدان جملة ما طاقتها مما يؤدي الى تناقص سعة الاهتزازات إلى أن تتخامد مع مرور الزمن، و قوى الاحتكاك ثلاثة أنواع :

أ ـ احتكاك لزوجي: يظهر عند حركة المائع.

ب ـ احتكاك جاف: يظهر عند انزلاق سطحين جافين على بعضهماومقداره ثابت بصورة تقريبية في أغلب الحالات.

ج ـ احتكاك بنيوي: وهو احتكاك داخلي لجزيئات المادة مما يؤدي لظهور تشوهات للأجسام الصلبة ناتجة عن الحركة الاهتزازية.

في هذه الدراسة سوف نعتبر هذه القوى لكن في حدود الحالة البسيطة أين يكون الضياع في الطاقة بسبب الاحتكاك اللزج.

2.3 الهزاز المتخامد

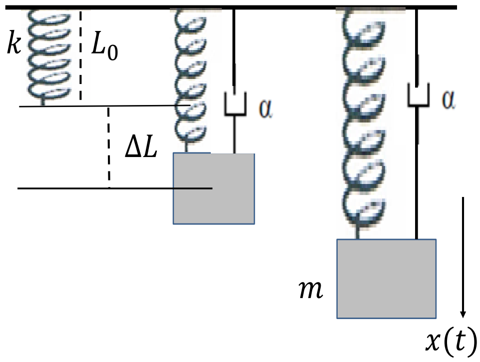
يعرف الهزاز المتخامد بتلك الاهتزازات الناتجة عن إزاحة الجملة الميكانيكية عن وضع اتزانها عندما تخضع لقوة احتكاك لزج، ويتناسب مقدار هذه القوة المقاومة للحركة طرديا مع السرعة وتزداد قيمتها بازدياد لزوجة المائع وكثافته.

ويتم تمثيل قوة التخامد كدالة للسرعة $\boxed{\vec{f_d} = -\alpha \vec{v}}$.

حيث : α معامل الاحتكاك اللزوجي وحدته ($Ns.m^{-1}$) وللتبسيط نعتبر α ثابت و v السرعة.

3.3 معادلة الحركة للهزاز المتخامد

سنستخدم طريقة نيوتن لايجاد المعادلة المميزة لحركة الهزاز المتخامد.
نعتبر نظام ميكانيكي مكون من كتلة m معلقة بنابض ثابت مرونته k طوله الابتدائي L_0 و استطالته ΔL تحت تاثير وزن الكتلة، ومخمد معامل احتكاكه α.



شكل 1.3: هزاز مروني متخامد

__في حالة السكون__

$$\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0 \qquad (1.3)$$

$$mg - k(L_0 + \Delta L) = 0$$
$$mg = k(L_0 + \Delta L) \qquad (2.3)$$

__في حالة الحركة__

$$\sum \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = m\vec{a} \qquad \vec{F_4} = \vec{f_d} = -\alpha\vec{v} \qquad (3.3)$$

$$mg - k((L_0 + \Delta L) + x) + f_d = m\ddot{x}$$
$$\underbrace{(mg - k(L_0 + \Delta L))}_{=0} - kx - \alpha v = m\ddot{x}$$

$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4.3)$$

من أجل الاحداثيات المعممة تصبح المعادلة (4.3) كالتالي:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (5.3)$$

إذن المعادلة (4.3) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (5.3).

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

وبمطابقة المعادلتين (4.3) و (5.3) نجد:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ و } \boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2m}}$$

حيث: ω_0 هو النبض الطبيعي لحركة الهزاز المتخامد.
λ ثابت التخامد.

هناك ثلاثة أنواع من التخامد :

أ ـ تخامد قوي: $\lambda > \omega_0 \Leftarrow$ الحركة متخامدة ولا يوجد اهتزازات.

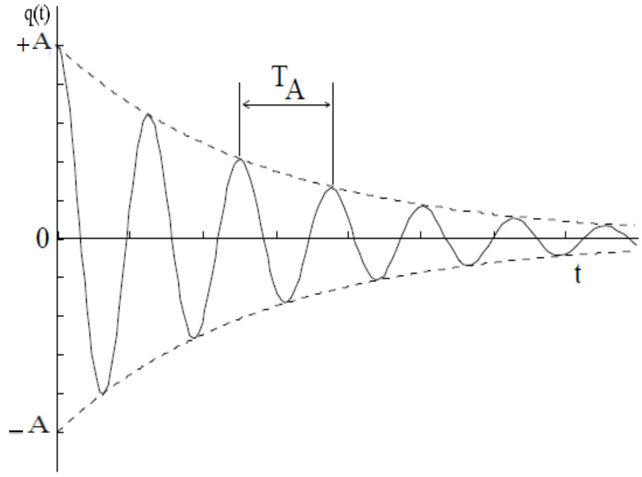
ب ـ تخامد حرج: $\lambda = \omega_0 \Leftarrow$ الحركة متخامدة ولا يوجد اهتزازات.

ج ـ تخامد ضعيف: $\lambda < \omega_0 \Leftarrow$ وهو نظام شبه دوري حيث أن الاهتزازات تتناقص سعتها مع الزمن.

ويكتب الحل الرياضي للهزاز المتخامد كالتالي:

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_A t + \varphi) \qquad (6.3)$$

حيث : $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ هو النبض الشبه دوري.



شكل 2.3: تغيرات الدالة $q(t)$ بدلالة الزمن في حالة التخامد الضعيف

4.3 التناقص اللوغاريتمي

تستعمل هذه الطريقة لايجاد مقدار التخامد في النظام الديناميكي وهو اللوغاريتم النيبيري النسبة بين أي سعتين متعاقبتين للاهتزازات المتخامدة.
نأخذ الحل الرياضي للهزاز المتخامد (6.3)، وعليه يكون التناقص اللوغاريتمي لقيمتين متتاليتين يفصلهما الزمن الدوري T_A للاهتزازة هو:

$$\delta = \ln\frac{q(t_1)}{q(t_2)} = \ln\frac{Ae^{-\lambda t_1}\cos(\omega_A t_1+\varphi)}{Ae^{-\lambda t_2}\cos(\omega_A t_2+\varphi)} \tag{7.3}$$

بما أن : $t_2 = t_1 + T_A$ فإن:

$$\cos(\omega_A t_2+\varphi) = \cos(\omega_A(t_1+T_A)+\varphi) = \cos(\omega_A t_1+\varphi)$$

ومنه

$$\begin{aligned}\delta = \ln\frac{q(t_1)}{q(t_2)} &= \ln\frac{Ae^{-\lambda t_1}\cancel{\cos(\omega_A t_1+\varphi)}}{Ae^{-\lambda t_2}\cancel{\cos(\omega_A t_2+\varphi)}}\\ &= \ln\frac{e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_2}}\\ &= \ln e^{\lambda(t_2-t_1)}\\ &= \lambda T_A \end{aligned} \tag{8.3}$$

إذن التناقص اللوغاريتمي يعطى بالعلاقة $\boxed{\delta = \lambda T_A}$، حيث T_A في هذه الحالة يسمى بالزمن الشبه دوري.

الفصل 4

الهزاز القسري

1.4 مقدمة

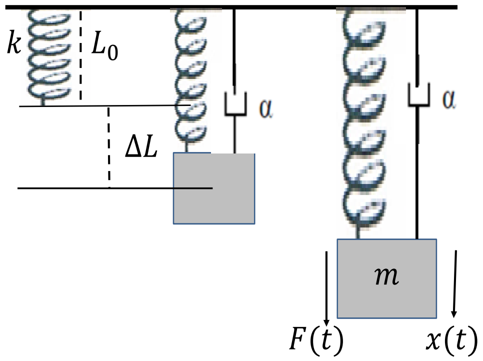
إن تخامد الحركات الاهتزازية يعود بالأصل الى ضياع في الطاقة الميكانيكية، ولتعويض هذا الضياع في الطاقة وللمحافظة على اهتزازية الحركة سنكون بحاجة إلى مصدر للطاقة من خلال قوة خارجية لذا فإننا سنؤثر على أي جملة ما متخامدة بقوة خارجية تكون في نفس اتجاه الحركة، مثل ما يوجد في أغلب الآلات الدورية للحركة في المضخات ...إلخ.

2.4 معادلة الحركة للهزاز القسري

نأخذ كمثال النواس المروني المكون من كتلة ـ نابض ومخمد كما هو موضح في الشكل أدناه (1.4) إذا أثرت قوة خارجية دورية توافقية F_{ext} على هذا النظام الميكانيكي من الأشكال التالية :

$$\begin{cases} F_{ext} = f_0 e^{i\omega t} \\ F_{ext} = f_0 \cos \omega t \\ F_{ext} = f_0 \sin \omega t \end{cases}$$

حيث: f_0 سعة الاثارة وحدتها N.
ω نبض الاثارة .



شكل 1.4: هزاز قسري

بالاعتماد على المعادلة (4.3) في الفصل السابق (3) نجد المعادلة الخاصة بالنظام الميكانيكي المدروس:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_{ext}}{m}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (1.4)$$

من أجل الاحداثيات المعممة تصبح المعادلة (1.4) كالتالي:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (2.4)$$

المعادلة (2.4) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة وذات طرف ثابت.

3.4 الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية للهزاز القسري

إن حل المعادلة (2.4) يأخذ الشكل التالي:

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \qquad (3.4)$$

حيث أن $q_h(t)$ هو الحل العام للمعادلة (2.4) المتجانسة أي:

$$\ddot{q}_h + 2\lambda\dot{q}_h + \omega_0^2 q_h = 0 \qquad (4.4)$$

وفي أغلب الحالات يظهر بأن حل المعادلة (4.4) هو الحل المعرف في الفصل السابق (3) من أجل التخامد الضعيف $\lambda < \omega_0$.

ومنه الحل الرياضي يعطى بـ :

$$q_h(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_A t + \varphi)$$

و $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ هو النبض الشبه دوري.
أما $q_p(t)$ هو الحل الخاص للمعادلة (2.4) غير المتجانسة:

$$\ddot{q}_p + 2\lambda\dot{q}_p + \omega_0^2 q_p = \frac{f_0}{m}e^{i\omega t} \tag{5.4}$$

وحلها الرياضي يأخذ الشكل التالي:

$$q_p(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \tag{6.4}$$

حيث A هي السعة في حالة الاهتزازات القسرية وتتعلق بالنبض ω.
تكتب على الشكل التالي:

$$A(\omega) = \frac{f_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \tag{7.4}$$

حيث : $f_0/m = A_0$.
و طور الحركة يكتب على الشكل التالي:

$$\varphi = \arctan\left[\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right] \tag{8.4}$$

بتعويض كل من المعادلتين (7.4) و (8.4) في العبارة (6.4) يكتب الحل الخاص كالتالي:

$$q_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}}\, e^{i\left(\omega t+\arctan\left[\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]\right)}$$

إن الحل $q(t)$ يتكون من جزئين فالحل $q_h(t)$ يمثل الاهتزازات الحرة المتخامدة أين تكون السعة متناقصة مع الزمن، في حين الحل $q_p(t)$ يمثل الاهتزازات الدائمة أو القسرية والتي تهتز بنبض ω و بسعة لا تتغير مع الزمن رغم وجود التخامد.
إذن الحل الرياضي لهزاز القسري في حالة تخامد ضعيف يكتب كالتالي:

$$q(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_A t + \varphi) + \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}}\, e^{i\left(\omega t+\arctan\left[\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]\right)}$$

4.4 ظاهرة التجاوب (الرنين)

يهتز الهزاز بتواتره الطبيعي ω_0 إذا أثرنا عليه بقوة خارجية سيهتز بتواتر ω، فإذا اقتربت ω من ω_0 نلاحظ أن الهزاز لا يتجاوب في هذه الحالة تسمى هذه الظاهرة بظاهرة التجاوب أو الرنين.

أمثلة توضيحية:

- لما تقطع فصيلة من الجنود جسرا حيث أن الجسر هو نظام ميكانيكي له مجموعة من تواترات طبيعية ω_0، فإذا مشى الجنود أي أثرت قوة خارجية على هذا الجسر بتواترات ω، في حالة يتساوى تواتر حركة الجنود مع أحد التواترات الطبيعية للجسر يحدث تجاوب (رنين) يؤدي الى انكساره بشدة.
- إن العديد من محطات الراديو وهي نظام كهربائي ترسل موجات لها ترددات مختلفة لا يفلح في الدخول منها إلا التي أبدت نفس تواتر الموجة، فإذا كان تواتر الاثارة أكبر أو أقل من التواتر الطبيعي نقول أن المحطة بها ضجيج.

5.4 التماثل الكهروميكانيكي

سنلخص في الجدول (1.4) التماثل بين النظام الميكانيكي و النظام الكهربائي.

جدول 1.4: التماثل الكهروميكانيكي

نظام ميكانيكي		نظام كهربائي
الانسحاب	الدوران	دارة RCL
الإزاحة x	الزاوية θ	الشحنة q
السرعة $\dot{x}$	السرعة الزاوية $\dot{\theta}$	التيار $\dot{q}$
التسارع $\ddot{x}$	التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$	التغير في التيار $\ddot{q}$
الكتلة m	عزم العطالة J	الوشيعة L
النابض k	ثابت الفتل C	مقلوب المكثفة $\frac{1}{c}$
ثابت التخامد λ	ثابت التخامد λ	المقاومة R
القوة F	العزم M	التوتر V
قانون نيوتن	قانون العزوم	قانون كيرشوف
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum M = J\ddot{\theta}$	$\sum V_i = 0$
الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	الطاقة الدورانية $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	الطاقة المغناطيسية $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
الطاقة الكامنة $U = \frac{1}{2}kx^2$	الطاقة الثقالية $U = mgh$	الطاقة الكهربائية $U = \frac{1}{2c}q^2$

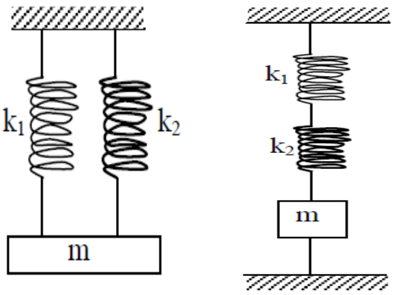
سلسلة الفصل الثالث والرابع

التمرين الأول:

لدينا النظام الميكانيكي المبين في الشكل (1) في الحالتين:

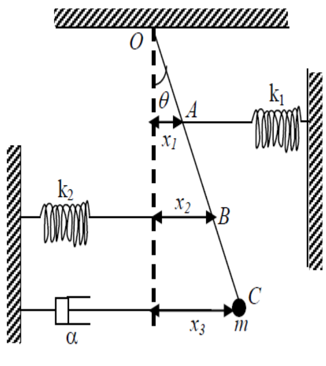
ـ الحالة (أ) الكتلة معلقة بنابضين مربوطين على التسلسل ـ الحالة (ب) الكتلة معلقة بنابضين مربوطين على التفرع.

1. أوجد النبض الطبيعي للحركة باستعمال طريقة الطاقة.
2. أوجد النابض المكافئ في الحالة (أ) والحالة (ب) .
3. استنتج النابض المكافئ في حالة ربط (N) نابض على التسلسل أو على التفرع بكتلة ما.



شكل 1

التمرين الثاني:



الشكل 2

نعتبر كتلة m معلقة بساق طوله l مهمل الكتلة يربط نابض ثابت مرونته k_1 مثبت بحائط من طرف و بنقطة A من الساق تبعد مسافة $\frac{l}{3}$ عن المركز O من الطرف الثاني. النقطة B تبعد مسافة $\frac{2l}{3}$ عن المركز O يتم توصيلها بنابض ثابت مرونته k_2 ومخمد معامل احتكاكه α مثبتين بحائط أنظر الشكل (2).

1. أوجد المعادلة التفاضلية المميزة لحركة هذا النظام.
2. أوجد الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية في حالة تخامد ضعيف، وعامل التخامد λ، النبض الدوري ω_0 والنبض الشبه دوري ω_A .

التمرين الثالث:

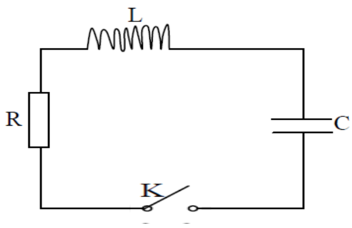
نعتبر دارة كهربائي RLC على التسلسل المكثفة مشحونة، نغلق القاطعة K حيث $q(t)$ شحنة المكثفة في اللحظة t كما هو مبين في الشكل (3).

1. أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

2. في أي حالة يمكن للنظام الكهربائي أن يهتز؟ ماهي القيمة الحرجة للمقاومة الكهربائية في هذه الحالة؟

3. مانوع التخامد من أجل $R = 200k\Omega$ و $R = 500\Omega$ أعط الحل الرياضي لكل حالة.

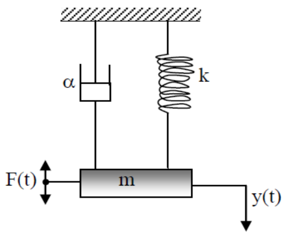
يعطى: $C = 0.01\mu F$ و $L = 1H$



شكل 3

التمرين الرابع:

نعتبر النظام الميكانيكي المتكون من كتلة M و نابض k و مخمد α تؤثر عليه قوة خارجية توافقية قيمتها $F_{ext} = f_0 e^{i\omega t}$ أنظر الشكل (4).



الشكل 4

1. أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

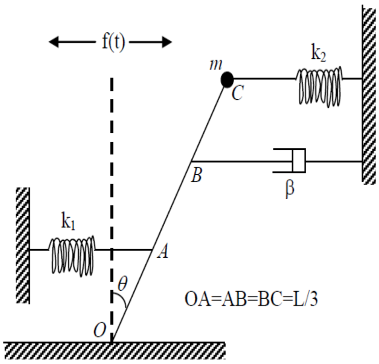
2. حدد سعة الاهتزاز القسري A والطور φ.

3. أعط شرط التجاوب ونبض التجاوب ω_R.

4. بالتماثل الكهروميكانيكي أعط الدارة المكافئة لهذا النظام الميكانيكي.

التمرين الخامس:

نعتبر جملة ميكانيكية مكونة من ساق مهمل الكتلة طوله L معلق به كتلة m مربوطة بنابض ثابت مرونته k_2 مثبت بحائط، في نقطة B من الساق تثبت مخمد ثابت تخامده α، وفي النقطة A يُربط نابض ثابت مرونته k_1 مثبت بحائط، تؤثر على الجملة قوة خارجية من الشكل $f(t) = \sin(\omega t)$ كما هو موضح في الشكل (5).



الشكل 5

1. أوجد المعادلة التفاضلية للحركة من أجل الإزاحات الصغيرة.
2. أحسب قيمة الزمن الدوري T_0 ، الزمن الشبه دوري T_A والتناقص اللوغاريتمي δ .
3. أعط الحل الرياضي الدائم لهذا النظام $\theta_p(t)$.
4. أعط الحل الرياضي لهذا النظام$\theta(t)$.

الفصل 5

طريقة لاغرانج وأنظمة ذو درجتي حرية

1.5 مقدمة

تصف قوانين نيوتن حركة جملة في معلم عطالي عندما تكون سرعتها متغيرة، و تكون هذه القوانين سهلة التطبيق في بعض الحالات وصعبة في البعض الآخر للتغلب على هذه الصعوبات تستعمل طرق أخرى لدراسة حركة جملة ما، هذه الطرق مكافئة لقوانين نيوتن وتسمح على الحصول على معادلة الحركة تسمى بطريقة لاغرانج.

2.5 طريقة لاغرانج

قام لاغرانج (1736 ـ 1813) بتقديم طريقة لدراسة الأنظمة الديناميكية المعقدة عندما يصبح الحصول على المعادلات التفاضلية للحركة من الطرق السابقة لنيوتن و الطاقة صعبا تعتمد هذه الطريقة على الطاقة الحركية T و الطاقة الكامنة U والعمل W، تتمثل السهولة في تطبيق هذه الطريقة في استخدام الكميات لا المتجهات، وفي الحصول على المعادلات التفاضلية للأنظمة الديناميكية المتعددة درجات الحرية.

3.5 القيود و درجات الحرية

نسمي قيدا كل تابع سلمي يربط بين الاحداثيات المعممة لجملة ما، ونسمي درجة حرية لجملة الاحداثيات اللازمة لتحديد موضع هذه الجملة و يرمز لها بـ d.

تعطى درجة الحرية بالعلاقة: $d = N - l$

حيت:

N عدد الاحداثيات المعممة.

l عدد معادلات القيود.

مثال: أوجد عدد درجات الحرية لمايلي

أ ـ حالة نواس مروني.

ب ـ حالة نواس ثقالي .

ج ـ نقطة مادية تتحرك على سطح كرة.

الحل:

أ ـ الاحداثيات المعممة في حالة نواس مروني هي x أي $N = 1$ و ولا يوجد أي قيد $l = 0$.

وعليه $d = 1 - 0$ عدد درجات الحرية هو $\boxed{d = 1}$.

ب ـ الاحداثيات المعممة في حالة نواس ثقالي هي x و θ أي $N = 2$ حيث ترتبط x بـ θ بالمعادلة $x = R\theta$ أي عدد القيود هو $l = 1$.

وعليه $d = 2 - 1$ عدد درجات الحرية هو $\boxed{d = 1}$.

ج ـ الاحداثيات المعممة في حالة نقطة مادية تتحرك على سطح كرة هي y ، x و z أي $N = 3$ حيث ترتبط هذه الاحاثيات بمعادلة الدائرة $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ أي عدد القيود هو $l = 1$.

وعليه $d = 3 - 1$ عدد درجات الحرية هو $\boxed{d = 2}$.

4.5 معادلة لاغرانج

تعطى دالة لاغرانج بالصيغة الرياضية التالية:

$$L = T - U \tag{1.5}$$

L هي دالة لاغرانج وهي تمثل الفرق بين الطاقة الحركية T و الطاقة الكامنة U للنظام.

أما عن معادلة لاغرانج لنظام ديناميكي فتعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.5}$$

حيت:

q_i الاحداثيات المعممة.

$\dot{q}_i$ السرعات المعممة.
أما $i = \overline{1-N}$ فهي دلالة على أن استخدام معادلة لاغرانج يمكننا من الحصول على عدد المعادلات التفاضلية المساوية لعدد درجات الحرية للنظام الديناميكي المراد دراسته.
تختلف صيغة معادلة لاغرانج حسب الهزاز المدروس فإذا كان:

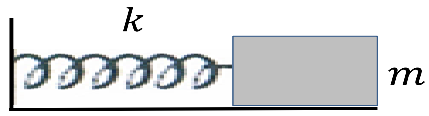
- هزاز حر : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
- هزاز متخامد : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$
- هزاز قسري : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + F_{ext}$

5.5 معادلة لاغرانج لنظام ذو درجة حرية واحدة

1.5.5 نظام ميكانيكي

1.1.5.5 نواس مروني

نعتبر نواس مروني مكون من كتلة m مربوط بنابض ثابت مرونته k.
نبحث عن دالة لاغرانج ثم معادلة لاغرانج.



شكل 1.5: هزاز مروني

- دالة لاغرانج :

$$L = T - U \tag{3.5}$$

$$q = x \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{4.5}$$

$$U = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.5}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{6.5}$$

- معادلة لاغرانج:

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{7.5}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}kx^2\right) = kx \end{cases} \tag{8.5}$$

وعليه معادلة لاغرانج تكتب كالتالي:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{9.5}$$

بالقسمة على m نجد:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 = 0 \tag{10.5}$$

إذن المعادلة (10.5) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (3.1) للحركة التوافقية البسيطة.

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

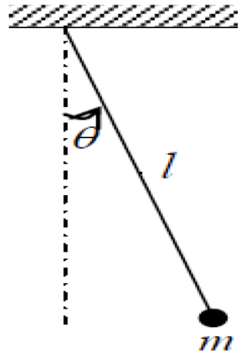
وبمطابقة المعادلتين (10.5) و (3.1) نجد:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0}$$

حيث ω_0 هو النبض الطبيعي لحركة النواس المروني.

2.1.5.5 نواس ثقالي

نعتبر نواس ثقالي بسيط مكون من كتلة m مربوطة بخيط طوله l.
نبحث عن دالة لاغرانج ثم معادلة لاغرانج.



شكل 2.5: هزاز ثقالي

- **دالة لاغرانج :**

$$L = T - U \tag{11.5}$$

$$q = \theta \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}J\dot{q}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{12.5}$$

(حيث J عزم عطالة نقطة مادية $J = ml^2$)

$$U = mg\Delta h = mgl(1 - \cos\theta) \tag{13.5}$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{14.5}$$

- **معادلة لاغرانج:**

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{15.5}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta}\big(mgl(1 - \cos\theta)\big) = mgl\sin\theta \end{cases} \tag{16.5}$$

من أجل الإزاحات الصغيرة نستخدم التقريب $\sin\theta \simeq \theta$

ومنه يصبح لدينا $\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\theta$

وعليه معادلة لاغرانج تكتب كالتالي:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \tag{17.5}$$

بالقسمة على ml^2 نجد:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{18.5}$$

إذن المعادلة (18.5) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (3.1) للحركة التوافقية البسيطة.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

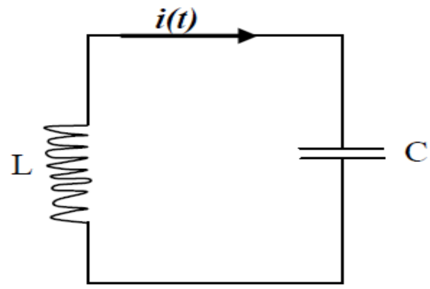
وبمطابقة المعادلتين (18.5) و (3.1) نجد:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0}$$

حيث ω_0 هو النبض الطبيعي لحركة النواس الثقالي.

2.5.5 نظام كهربائي

نعتبر دارة كهربائية بسيطة مكونة من مكثفة C و وشيعة L.
نبحث عن دالة لاغرانج ثم معادلة لاغرانج.



شكل 3.5: دارة كهربائية LC

- <u>دالة لاغرانج</u> :

$$L = T - U \tag{19.5}$$

في حالة نظام كهرابئي فإن الاحداثية المعممة للنظام هي الشحنة q، أما الطاقة الحركية فتتمثل

في الطاقة المغناطيسية E_{mag}، و الطاقة الكامنة للجملة فتتمثل في الطاقة الكهربائية E_{elc}.

$$T = E_{mag} = \int V_L dq = \int L\frac{di}{dt}dq = \int Li di$$
$$= \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \tag{20.5}$$

(حيث V_L الكمون الكهربائي للوشيعة و $i = \dfrac{dq}{dt}$)

$$U = E_{elc} = \int V_c dq = \int \frac{q}{c}dq = \frac{1}{2c}q^2 \tag{21.5}$$

(حيث V_c الكمون الكهربائي للمكثفة)

$$L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2c}q^2 \tag{22.5}$$

- معادلة لاغرانج:

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{23.5}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{1}{2}L\dot{q}^2\right) = \frac{d}{dt}(L\dot{q}) = L\ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q}\left(\frac{1}{2c}q^2)\right) = \frac{1}{c}q \end{cases} \tag{24.5}$$

$$L\ddot{q} + \frac{1}{c}q = 0 \tag{25.5}$$

بالقسمة على L في المعادلة (25.5) نجد:

$$\ddot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0 \tag{26.5}$$

إذن المعادلة (26.5) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية توافق المعادلة المعممة (3.1) للحركة التوافقية البسيطة.

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

وبمطابقة المعادلتين (26.5) و (3.1) نجد:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{Lc}} = \omega_0}$$

حيث ω_0 هو النبض الطبيعي للنظام الكهربائي.

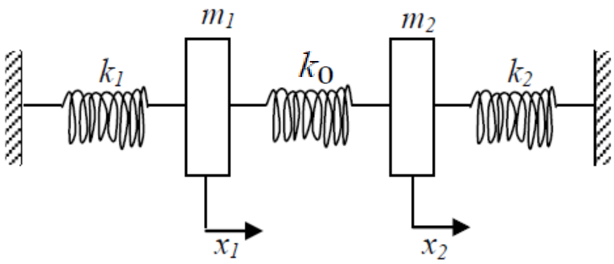
6.5 معادلتي لاغرانج لنظام ذو درجتي حرية (الاهتزازات المترابطة)

إن دراسة اهتزازات جملة من الأجسام على سبيل المثال الذرات المشكلة للماء H_2O يمكن اعتبارها أنها جملة كتل مرتبطة ببعضها البعض بواسطة نوابض. إذا كانت كل كتلة مرتبطة بنابض على حدى فإن كل كتلة سوف تهتز باستقلالية عن الأخرى كما تطرقنا له في الفصول السابقة، أما إذا كانت الكتل مرتبطة فيما بينها تسمى اهتزازات مترابطة. فإذا كان نظام ذو درجتي حرية فهو يمتلك معادلتي لاغرانج و يهتز بتواترين ω_1 و ω_2 وله نمطين أساسين للحركة.

مثال 1:

نعتبر كتلتين m_1 و m_2 تتحركان أفقيا دون احتكاك، بحيث كليهما مثبتين بحائطين مختلفين بواسطة نابضين ثابتي قوتهما k_1 و k_2 على الترتيب، الكتلتين مربوطتين ببعضهما بنابض ثابت مرونته k_0. كما هو موضح في الشكل (4.5).

أوجد تواترات الحركة و أنماط الحركة.



شكل 4.5: نظام ميكانيكي مترابط مروني

دالة لاغرانج :

$$L = T - U \tag{27.5}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2 \tag{28.5}$$

$$\begin{aligned} U &= U_{k_1} + U_{k_0} + U_{k_2} \\ &= \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_0\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2(-{x_2}^2) \end{aligned} \tag{29.5}$$

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2-\frac{1}{2}k_1{x_1}^2-\frac{1}{2}k_0\left(x_2-x_1\right)^2 \\ -\frac{1}{2}k_2{x_2}^2 \tag{30.5}$$

- معادلتي لاغرانج:

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \backslash i=\overline{1,2} \tag{31.5}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases} \tag{32.5}$$

$$(5.32)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{1}{2}k_1{x_1}^2-\frac{1}{2}k_0\left(x_2-x_1\right)^2\right]=0\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{1}{2}k_0\left(x_2-x_1\right)^2-\frac{1}{2}k_2{x_2}^2\right]=0\end{cases} \tag{33.5}$$

$$(5.33)\Leftrightarrow\begin{cases}m_1\ddot{x_1}+(k_1+k_0)x_1-k_0x_2=0\\ m_2\ddot{x_2}+(k_2+k_0)x_2-k_0x_1=0\end{cases} \tag{34.5}$$

وهما معادلتين تفاضليتين من الدرجة الثانية حلهما على التوالي:

$$\begin{cases}x_1(t)=A\cos(\omega t)\\ x_2(t)=B\cos(\omega t)\end{cases} \tag{35.5}$$

بتعويض (35.5) في (34.5) نجد:

$$(5.35)\Leftrightarrow\begin{cases}-m_1\omega^2A\cos(\omega t)+(k_1+k_0)A\cos(\omega t)-k_0B\cos(\omega t)=0\\ -m_2\omega^2B\cos(\omega t)+(k_2+k_0)B\cos(\omega t)-k_0A\cos(\omega t)=0\end{cases} \tag{36.5}$$

$$(5.36)\Leftrightarrow\begin{cases}(-m_1\omega^2+k_1+k_0)A-k_0B=0\\ -k_0A+(-m_2\omega^2+k_2+k_0)B=0\end{cases} \tag{37.5}$$

لحل (37.5) نضع التبسيط التالي:

$$k_0 = k_1 = k_2 = k \qquad , \qquad m_1 = m_2 = m$$

ومنه (37.5) تصبح كالتالي:

$$(5.37) \Leftrightarrow \begin{cases} (-m\omega^2 + 2k)A - kB = 0 \\ -kA + (-m\omega^2 + 2k)B = 0 \end{cases} \tag{38.5}$$

الآن نكتب (38.5) على الشكل المصفوفي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39.5}$$

لحل (39.5) نحسب $detD = 0$:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \tag{40.5}$$

$$\begin{aligned} (5.42) \Leftrightarrow & (2k - m_1\omega^2)^2 - k^2 = 0 \\ & (k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) = 0 \end{aligned} \tag{41.5}$$

$$\begin{cases} k - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 3k - m\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases} \tag{42.5}$$

ومنه التواترين ω_1 و ω_2 هما على التوالي:

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases} \tag{43.5}$$

بتعويض $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ في (38.5) نجد: $A = B$

بتعويض $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ في (38.5) نجد: $A = -B$

ـ أنماط الحركة الأساسية:

- النمط الأول:
من أجل $A = B$

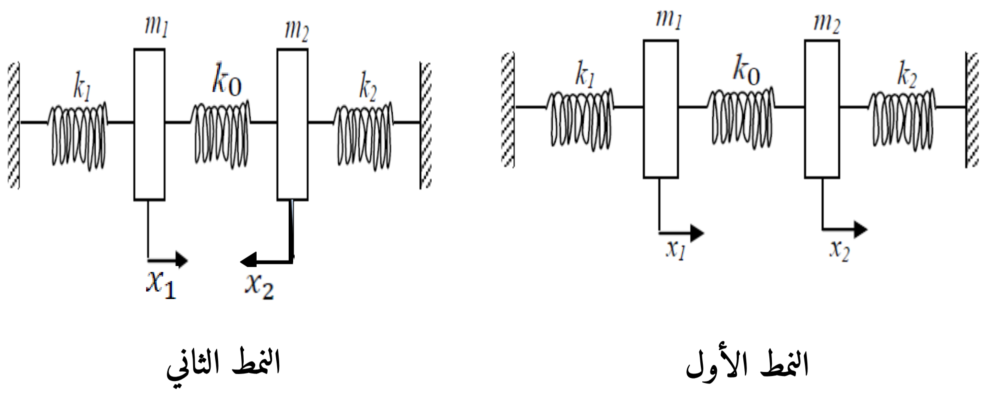
$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t) \end{cases} \tag{44.5}$$

أي أن $x_1(t) = x_2(t)$

- النمط الثاني:
من أجل $A = -B$

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -A\cos(\omega_2 t) \end{cases} \tag{45.5}$$

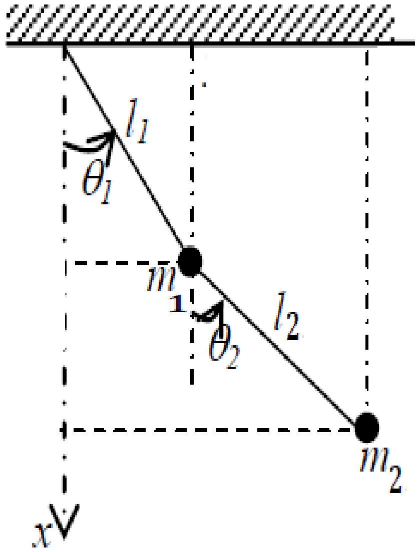
أي أن $x_1(t) = -x_2(t)$



شكل 5.5: الأنماط الأساسية لنظام ميكانيكي مترابط مروني

مثال 2:

نعتبر نواسين ثقاليين مرتبطين ببعضهما البعض حيث كتلة النواس الأول m_1 و كتلة النواس الثاني m_2 كما هو مبين في الشكل (6.5).
أوجد تواترات الحركة و أنماط الحركة.



شكل 6.5: نظام ميكانيكي مترابط ثقالي

دالة لاغرانج :

$$L = T - U \tag{46.5}$$

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 &= \frac{1}{2}J_1\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2({l_1}^2\dot{\theta}_1 + {l_2}^2\dot{\theta}_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[{l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + {l_2}^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right] \end{aligned} \tag{47.5}$$

$$\begin{aligned} U &== U_1 + U_2 = (m_1 + m_2)gh_1 + m_2gh_2 \\ &= (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\theta_1) + m_2gl_2(1 - \cos\theta_2) \end{aligned} \tag{48.5}$$

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[{l_1}^2\dot{\theta_1}^2 + {l_2}^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right] \\ &- (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos\theta_1) - m_2gl_2(1 - \cos\theta_2) \end{aligned} \tag{49.5}$$

إن الوصول لمعادلاتي لاغرانج انطلاقا من (49.5) أمرا معقدا لذا يستوجب استخدام بعض التقريبات.

نأخذ تقريب الزوايا الصغيرة من أجل الإزاحات الصغيرة أي أن الزاويتين θ_1 و θ_2 والسرعتين

$\dot{\theta}_1$ و $\dot{\theta}_2$ تبقى صغيرة مهما تغير الزمن، وعليه يمكن تبسيط المعادلتين (47.5) و (48.5) كالتالي:

$$\cos(\theta_2-\theta_1)=1 \Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+\frac{1}{2}m_2\big[{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big] \quad (50.5)$$

$$\cos\theta_1=1-\frac{{\theta_1}^2}{2}, \cos\theta_2=1-\frac{{\theta_2}^2}{2} \Rightarrow U=\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}m_2gl_2{\theta_2}^2 \quad (51.5)$$

بتعويض المعادلتين (50.5) و (51.5) في المعادلة (49.5) تبسط عبارة دالة لاغرانج كالتالي:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+\frac{1}{2}m_2\big[{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big] \\ &- \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1{\theta_1}^2+\frac{1}{2}m_2gl_2{\theta_2}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2){l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+\frac{1}{2}m_2{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ &- \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1{\theta_1}^2-\frac{1}{2}m_2gl_2{\theta_2}^2 \end{aligned} \quad (52.5)$$

- معادلتي لاغرانج:

باستخدام الصيغة الرياضية لمعادلة لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad \backslash i=\overline{1,2} \quad (53.5)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\big)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=0 \\ \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\big)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=0 \end{cases} \quad (54.5)$$

$$(5.54) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_1}\big[\frac{1}{2}(m_1+m_2){l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big]\big)- \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}\big[\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1{\theta_1}^2\big]=0 \\ \frac{d}{dt}\big(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_2}\big[\frac{1}{2}m_2{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2+m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\big]\big) \\ -\frac{\partial}{\partial\theta_2}\big[\frac{1}{2}m_2gl_2{\theta_2}^2\big]=0 \end{cases} \quad (55.5)$$

$$(5.55) \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1+m_2){l_1}^2\ddot{\theta_1}^2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta_2} + (m_1+m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta_2}^2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta_1} + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

(56.5)

وهما معادلتين تفاضليتين من الدرجة الثانية حلهما على التوالي:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A\cos(\omega t) \\ \theta_2(t) = B\cos(\omega t) \end{cases} \qquad \textbf{(57.5)}$$

بتعويض (57.5) في (56.5) نجد:

$$(5.35) \Leftrightarrow \begin{cases} -(m_1+m_2){l_1}^2\omega^2 A\cos(\omega t) - m_2 l_1 l_2 \omega^2 B\cos(\omega t) \\ +(m_1+m_2) g l_1 A\cos(\omega t) = 0 \\ -m_2 {l_2}^2 \omega^2 B\cos(\omega t) - m_2\omega^2 l_1 l_2 A\cos(\omega t) + m_2 g l_2 B\cos(\omega t) = 0 \end{cases}$$

(58.5)

$$(5.58) \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1+m_2)(g l_1 - {l_1}^2\omega^2)A - m_2 l_1 l_2 \omega^2 B = 0 \\ (m_2 g l_2 - m_2 {l_2}^2\omega^2)B - m_2\omega^2 l_1 l_2 A = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(59.5)}$$

لحل (59.5) نضع التبسيط التالي:

$$l_1 = l_2 = l \qquad , \qquad m_1 = m_2 = m$$

ومنه (59.5) تصبح كالتالي:

$$(5.58) \Leftrightarrow \begin{cases} (2mgl - 2ml^2\omega^2)A - ml^2\omega^2 B = 0 \\ (mgl - ml^2\omega^2)B - ml^2\omega^2 A = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(60.5)}$$

$$(5.60) \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{2g}{l} - 2\omega^2)A - \omega^2 B = 0 \\ -\omega^2 A + (\frac{g}{l} - \omega^2)B = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(61.5)}$$

الآن نكتب (61.5) على الشكل المصفوفي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2g}{l} - 2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\frac{g}{l} - \omega^2 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(62.5)}$$

لحل (62.5) نحسب $detD = 0$:

$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{l} - 2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(63.5)}$$

$$(5.63) \Leftrightarrow (\frac{2g}{l} - 2\omega^2)(\frac{g}{l} - \omega^2) - \omega^4 = 0 \qquad \textbf{(64.5)}$$

ومنه التواترين ω_1 و ω_2 هما على التوالي:

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}} \\ \omega = \omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}} \end{cases} \qquad \textbf{(65.5)}$$

بتعويض ω_1 في (61.5) نجد: $A = -B$
بتعويض ω_2 في (61.5) نجد: $A = B$
ـ <u>أنماط الحركة الأساسية:</u>

- **النمط الأول:**
  من أجل $A = -B$

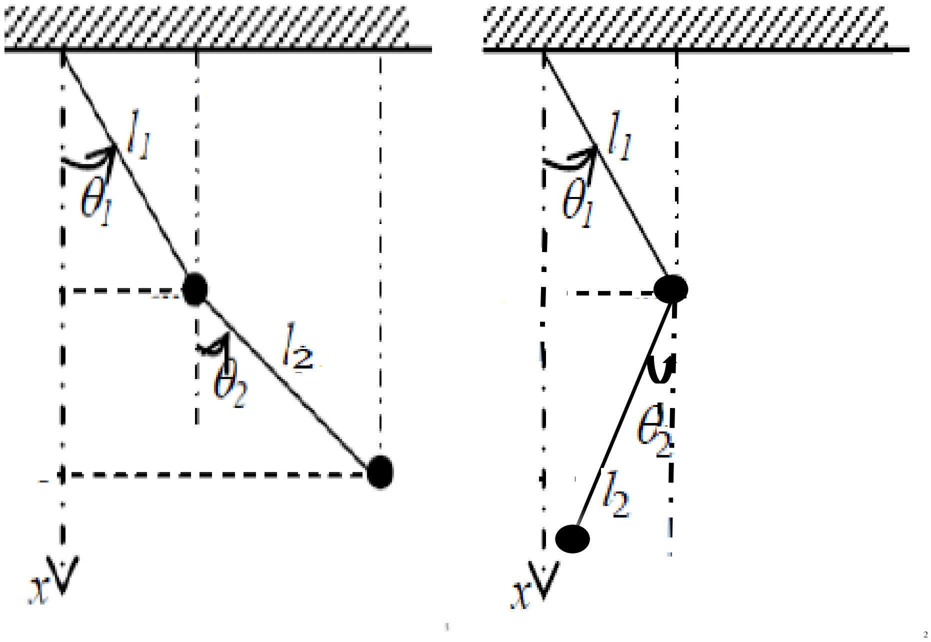
$$\begin{cases} \theta_1(t) = A\cos(\omega_1 t) \\ \theta_2(t) = -A\cos(\omega_1 t) \end{cases} \qquad \textbf{(66.5)}$$

أي أن $\theta_1(t) = -\theta_2(t)$

- **النمط الثاني:**
  من أجل $A = B$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A\cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) = A\cos(\omega_2 t) \end{cases} \qquad \textbf{(67.5)}$$

أي أن $\theta_1(t) = \theta_2(t)$



النمط الثاني النمط الأول

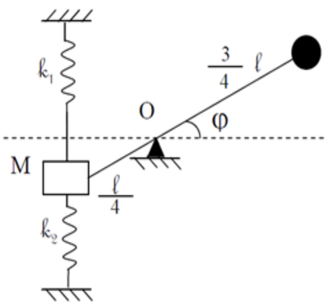
شكل 7.5: الأنماط الأساسية لحركة نظام ميكانيكي مترابط ثقالي

سلسلة الفصل الخامس

التمرين الأول:

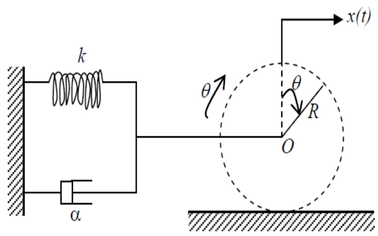
يهتز القضيب المبين في الشكل 1 والحامل للكتلتين M و m حول المحور المار بـ O ويكون أفقيا في حالة التوازن $(\varphi = 0)$ باعتبار الاهتزازات صغيرة حول موضع التوازن.

أوجد النبض الطبيعي لحركة الجملة باستعمال طريقة لاغرانج.



الشكل 1

التمرين الثاني:



الشكل 2

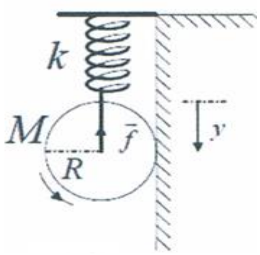
نعتبر نظام ميكانيكي مكون من قرص كتلته M و نصف قطره R يدور دون انزلاق على مستوي افقي، مربوط بنابض ثابت مرونته k ومخمد ثابت لزوجته α.

المطلوب:

1. الطاقة الحركية للنظام.
2. الطاقة الكامنة للنظام.
3. طاقة التبدد للنظام.
4. دالة لاغرانج.
5. المعادلة التفاضلية والنبض الطبيعي للحركة.

التمرين الثالث:

نعتبر النظام الميكانيكي الموضح في الشكل (3) والمتمثل في قرص معلق بنابض يتحرك عموديا حول نفسه ذهابا وايابا بحيث يبقى على اتصال بالجدار نرمز لمجموع الاحتكاكات بالقوة $f = -\alpha v_{disque}$ المطبقة على مركز القرص.



الشكل 3

1. أوجد الطاقة الكامنة U .

2. أوجد الطاقة الحركية T .

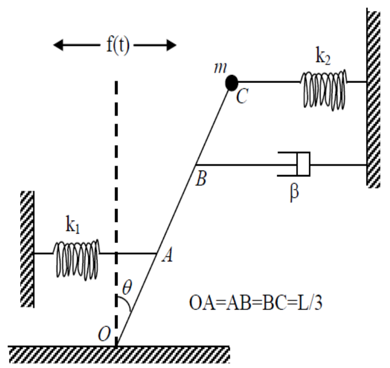
3. أوجد طاقة التبدد D الناتجة عن قوة الاحتكاكات.

4. أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

5. علما ان $k = 13.5N/m$ و $M = 1kg$، اوجد القيمة العظمى للمعامل α التي لا ينبغي ان يصلها النظام كي يبقى في حالة اهتزاز. أوجد الزمن اللازم لكي تنقص السعة بـ $1/5$ من قيمتها، ثم أحسب قيمة التناقص اللوغاريتمي للحركة من أجل $\alpha = 3N.s/m$

التمرين الرابع:

نعتبر جملة ميكايكية مكونة من ساق مهمل الكتلة طوله L معلق به كتلة m مربوطة بنابض ثابت مرونته k_2 مثبت بحائط، في نقطة B من الساق نثبت مخمد ثابت تخامده α، وفي النقطة A يُربط نابض ثابت مرونته k_1 مثبت بحائط، تؤثر على الجملة قوة خارجية من الشكل $f(t) = \cos(2t)$ كما هو موضح في الشكل (4).



الشكل 4

1. أوجد المعادلة التفاضلية لحركة هذه الجملة الميكانيكية بطريقة لاغرانج من أجل الإزاحات الصغيرة.

2. من أجل تخامد ضعيف و $m = 0.2kg, k_1 = 9N/m, k_2 = 5N/m, \alpha = 0.9kg/s, L = 0.5m, g = 10m/s^2$:

أ- أحسسب قيمة النبض الطبيعي للحركة ω_0 و النبض الشبه دوري ω_A.

ب- أوجد الحل المتجانس $\theta_h(t)$ لهذه الجملة الميكانيكية.

ج ـ أوجد الحل الدائم $\theta_p(t)$ لهذه الجملة الميكانيكية.

د ـ استنتج الحل الرياضي الكلي $\theta(t)$.

تذكير: تعطى سعة و فرق الطور للاهتزازات القسرية لهذه الجملة الميكانيكية بالعبارتين التاليتين على الترتيب:

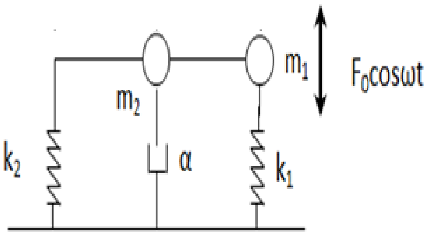
$$A(\omega) = \frac{\frac{1}{mL^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}$$

و

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

التمرين الخامس:

نعتبر النظام الميكانيكي المكون من كتلة m_1 إزاحتها x_1 و كتلة m_2 إزاحتها x_2، ونابضين k_1 و k_2 و مخمد ذو معامل تخامد α، تؤثر عليه قوة خارجية توافقية قيمتها $F(t) = F_0 \cos wt$
(أنظر الشكل 5)



الشكل 5

1. أوجد الطاقة الحركية T للنظام.

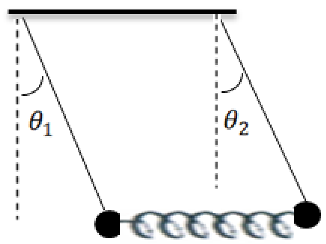
2. أوجد الطاقة الكامنة U للنظام.

3. أوجد دالة لاغرانج L ثم المعادلات التفاضلية للحركة.

4. نهمل القوة الخارجية ومعامل التخامد ، ومن أجل $m_1 = m_2 = m$ و $k_1 = k_2 = k$ في هذه الحالة : أ- أوجد التوترات الزاوية للحركة.

التمرين السادس:

نعتبر نواسين متماثلين (نفس الكتلة m والطول L) مترابطين بواسطة نابض ثابت مرونته k كما هو موضح في الشكل (6).



الشكل 6

1. أوجد عبارة لاغرانج لهذه الجملة من أجل الازاحات الصغيرة و ذلك باعتبار وضع التوازن عند $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

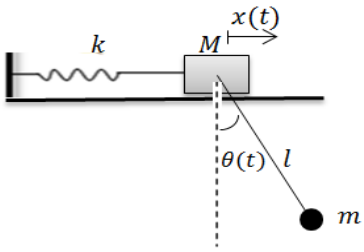
2. استنتج معادلتي الحركة.

3. أوجد الأنماط الطبيعية الاساسية للحركة ومثلها.

التمرين السابع:

نعتبر الجملة في الشكل (7) بحيث يتعلق نواس ذو الكتلة m بالكتلة M ويمكنه الحركة بطريقة حرة وذلك باعتبار الاهتزازات صغيرة فـ:

1. أوجد الطاقة الحركية T.
2. أوجد الطاقة الكامنة U.
3. أوجد دالة لاغرانج ثم المعادلات التفاضلية للحركة.
4. اذا علمت أن $k = mg/l$ و $M = 2m$ فأوجد التوترات الزاوية للحركة.

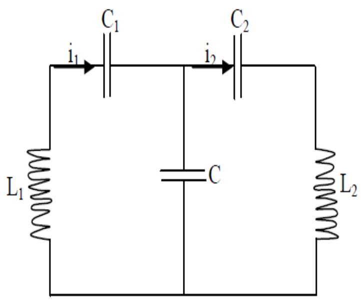


الشكل 7

التمرين الثامن:

نعتبر دراتين كهربائيتين LC مربوطتين فيما بينهما بمكثفة حيث $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$ كما هو مبين في الشكل (8).

1. أوجد المعادلتين التفاضليتين للنظام الكهربائي بدلالة i_1 و i_2ثم بدلالة q_1 و q_2.
2. أوجد ترددات هذا النظام.



الشكل 8

الجزء II

الأمواج الميكانيكية

الفصل 6

الأمواج المنتشرة

1.6 الحركة الموجية

إذا انتقلت الاهتزازات من جسم إلى آخر أو من نقطة إلى أخرى في وسط مادي يتشكل في النهاية ما يسمى بموجة، فمثلا عندما نلقي حجرا في بركة ماء راكض يحدث في مكان سقوط الحجر تشوه في سطح الماء ينتقل على شكل تجاعيد أي تتشكل أمواج الماء.

2.6 تصنيفات الأمواج

تصنف الأمواج حسب عدة اعتبارات أهمها:

1. حسب البعد:

- ذات بعد واحد: مثل انتشار موجة في وتر.
- ذات بعدين: مثل الأمواج المائية.
- ذات ثلاثة أبعاد: مثل الأمواج الصوتية.

2. حسب الوسط:

- مادية: وهي موجات ترافق الذرات والجزيئات و الالكترونات...إلخ.
- كهرومغناطيسية: لا تحتاج لوسط مادي لانتقالها كالضوء.
- ميكانيكية: تتولد في الأوساط المرنة وتحتاج إلى وسط مادي لانتقالها.

3.6 الموجة الميكانيكية

وهي اضطراب ينتشر في وسط مادي ناقلا معه طاقة، الوسط المادي الذي تحدث فيه اهتزازات هو سلسلة من الجسيمات المترابطة حيث أن هذه الجزيئات لا تتحرك من مكانها بل تقوم بحركة اهتزازية حول وضع توازنها، ولكي تتولد موجة ميكانيكية يجب أن يكون هناك مصدر اهتزاز. وهناك نوعان من الموجات:

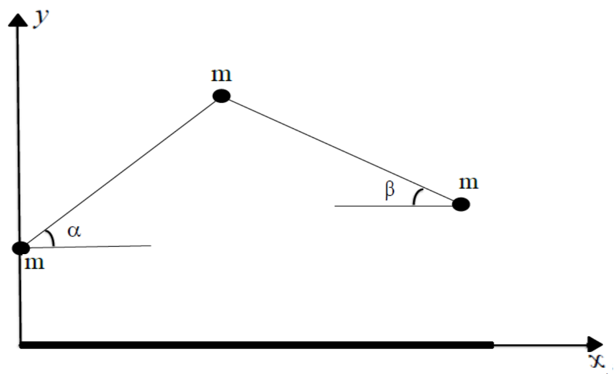
1. موجات عرضية: جزيئات الوسط المادي تهتز عموديا على جهة انتشار الموجة.
2. موجات طولية: جزيئات الوسط المادي تهتز موازية لجهة انتشار الموجة.

4.6 معادلة الانتشار للموجة ذو حبل مهتز

نعتبر وتر (حبل) مكون من m نقطة مادية مشدود من طرفيه بقوة شد إبتدائية T_0.
نفترض أن:

- الإزاحات y أطول بكثير من طول الموجة λ.
- الزوايا التي يصنعها الوتر مع محور الاتزان صغيرة.
- T_0 تبقى ثابتة على طول الوتر.

بأخذ عنصر صغير من الوتر كتلته Δm و طوله Δx على بعد x من بدايته.



شكل 1.6: جزء من حبل مهتز

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{aligned}
& T_1 = T_2 = T_0 \\
ox: \quad & \vec{T_1} + \vec{T_2} = 0 \Rightarrow T_0\cos(\alpha) - T_0\cos(\beta) = 0 \\
oy: \quad & T_2\sin(\beta) - T_1\sin(\alpha) = m\ddot{y} \\
& T_0\sin(\beta) - T_0\sin(\alpha) = m\ddot{y} \\
& T_0\sin(\beta) - T_0\sin(\alpha) = \Delta m\ddot{y} \\
& T_0\left[\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right] = \Delta m\ddot{y} \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

من أجل الزوايا الصغيرة: $\sin(\beta) = \tan(\beta)$ **و** $\sin(\alpha) = \tan(\alpha)$**.**

من الشكل لدينا أيضا:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_1} \qquad (2.6)$$

$$\sin(\beta) = \tan(\beta) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_2} \qquad (3.6)$$

من جهة أخرى لدينا ρ **هي الكتلة الخطية حيث:**

$$\Delta m = \rho\Delta x \qquad (4.6)$$

ومنه بتعويض كلا من (6.3)**،** (6.2) **و** (6.4) **في** (6.1) **نجد:**

$$\begin{aligned}
& T_0\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_2}\right] = \rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
& \frac{T_0}{\rho}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x_2}\right]}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

بماأن ($\Delta x = x_2 - x_1 \ll$ **) فإنه يمكن كتابة المعادلة كالتالي:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (6.6)$$

(6.6) وهي معادلة الموجة أو معادلة الإنتشار.
بشكل عام تكتب بالصيغة:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (7.6)$$

حيث أن:
v سرعة الإنتشار وهي تعتمد على طبيعة النظام المهتز وخصائصه الفيزيائية وفي هذه الحالة نجد $v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$.

5.6 معادلة الموجة

لوصف أي موجة يجب ايجاد معادلة تعطي شكلها، مما يعني حاجتنا لعلاقة من الشكل:

$y = f(x \pm vt)$ ، $y = f(x, t)$

$$\underbrace{y(x,t)}_{\text{الانتقال}} = \underbrace{y_m}_{\text{السعة}} \underbrace{\sin(kx + \omega t + \varphi)}_{\text{الحد المهتز}} \quad (8.6)$$

حيث:

k العدد الموجي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.6)$$

و λ الطول الموجي.

6.6 حل معادلة الموجة

يأخذ حل معادلة الموجة ثلاثة أشكال:

- موجة متحركة نحو اليمين في اتجاه المحور ox.

$y(x,t) = f(x - vt)$

- موجة متحركة نحو اليسار في الاتجاه المعاكس للمحور ox.

$$y(x,t) = g(x+vt)$$

- مزيج بين موجة متحركة نحو اليمين وأخرى نحو اليسار وتأخذ الشكل الرياضي التالي:

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

7.6 الطاقة المحمولة من طرف الموجة

من أجل جزء صغير من الوتر كتلته dm سنبرهن أن الطاقة المحمولة من طرف الموجة قيمة ثابتة.
نعلم أن الطاقة الكلية: $E = T + U$.
أما الطاقة الحركية T من أجل جزء صغير من الوتر فتعطى بالعلاقة التالية:

$$dT = \tfrac{1}{2} dm\, v^2$$

نعتبر موجة من الشكل:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

ومنه:

$$\dot{y}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \tag{10.6}$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$dm = \rho\, dx \tag{11.6}$$

فإن الطاقة الحركية تصبح كالتالي:

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm\, \dot{y}(x,t)^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\, dx\, [-\omega A\cos(kx-\omega t)]^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cos^2(kx-\omega t) dx \\ \Rightarrow T &= \int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cos^2(kx-\omega t) dx \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \tag{12.6}$$

بطريقة مماثلة نجد الطاقة الكامنة U من أجل جزء صغير من الوتر كالتالي:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2}dk\,y^2 = \frac{1}{2}dm\,\omega^2 y(x,t)^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2\left[A\cos(kx-\omega t)\right]^2 dx \\ \Rightarrow U &= \int_0^{\lambda}\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\cos^2(kx-\omega t)dx \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\left[\frac{\lambda}{2}\right] \end{aligned} \tag{13.6}$$

بجمع المعادلتين (6.12) و (6.13) نجد:

$$E = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\left[\frac{\lambda}{2}\right] + \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\left[\frac{\lambda}{2}\right] = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\lambda \tag{14.6}$$

أي أن الطاقة الكلية $E = cste$ فهي ثابتة.

الفصل 7

الأمواج المستقرة

1.7 الأمواج المستقرة

عند نهايتي مقيدتين لحبل تلتقي موجتان لهما نفس الخصائص الآتية:
- السعة - نفس النبض - انتقال في جهتين متعاكستين.
فإننا حتما نتحصل على موجة مستقرة أو موجة موقوفة يكون هذا نتيجة انعكاس موجة على الحاجز فتتدخلان الموجة الواردة والموجة المنعكسة لإعطاء موجة مستقرة.
يمكن الحصول رياضيا على معادلة تصف هاته الأمواج:

- الموجة الواردة:
$$y_i(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
- الموجة المنعكسة:
$$y_r(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$
- الموجة المستقرة:
$$y_i(x,t) + y_r(x,t)$$

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_i(x,t) + y_r(x,t) \\ &= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) \\ &= A\big[\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t + \sin kx\cos\omega t + \cos kx\sin\omega t\big] \\ &= \underbrace{2A\sin kx}_{A(x)}\cos\omega t \end{aligned} \tag{1.7}$$

حيث أن $A(x)$ تمثل السعة للموجة المستقرة.

- من أجل سعة أعظمية $A(x)_{max}$ نجد:

$$\begin{aligned} A(x)_{max} &\Rightarrow \sin kx = 1 \Rightarrow 2A\sin kx = 2A \\ kx &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2k} \\ x &= (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} \\ x &= (2n+1)\frac{\lambda}{4} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4} \\ n=1 \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{4} \\ n=2 \Rightarrow x = \frac{5\lambda}{4} \end{cases}$$

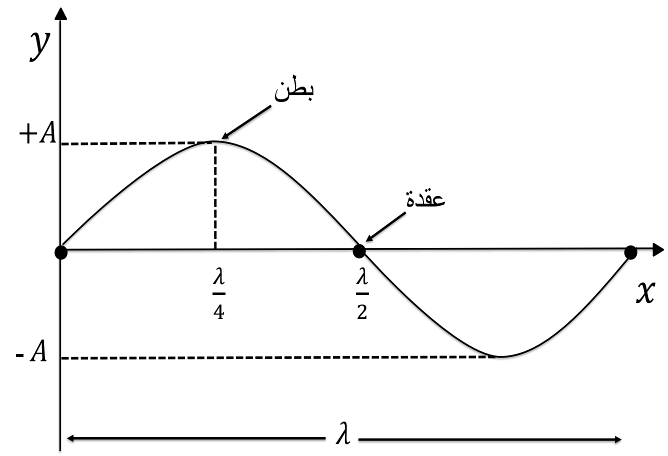
أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بـ $\frac{\lambda}{4}$، $\frac{3\lambda}{4}$ ، $\frac{5\lambda}{4}$ .....تهتز من الأعلى إلى الأسفل بسعة $2A$ تسمى هذه النقاط البطن.

- من أجل سعة دنيا $A(x)_{min}$ نجد:

$$\begin{aligned} A(x)_{min} &\Rightarrow 2A\sin kx = 0 \\ kx &= n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} \\ x &= n\pi\frac{\lambda}{2\pi} \\ x &= n\frac{\lambda}{2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} n=0 \Rightarrow x = 0 \\ n=1 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2} \\ n=2 \Rightarrow x = \lambda \end{cases}$$

أي أن كل النقاط التي تبعد عن بداية الحبل بـ 0، $\frac{\lambda}{2}$ ، λ .....سعتها معدومة تسمى هذه النقاط العقدة.



شكل 1.7: موجة مستقرة

2.7 أنماط الذبذبة

لايجاد أنماط الذبذبة نعتبر حبل طوله L مقيد من نهايتين $x = L$ و $x = 0$.

$$y(x,t) = 2A\sin kx\cos\omega t$$

بتطبيق الشروط الحدية:

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 2A\sin kL\cos\omega t = 0 \end{cases}$$

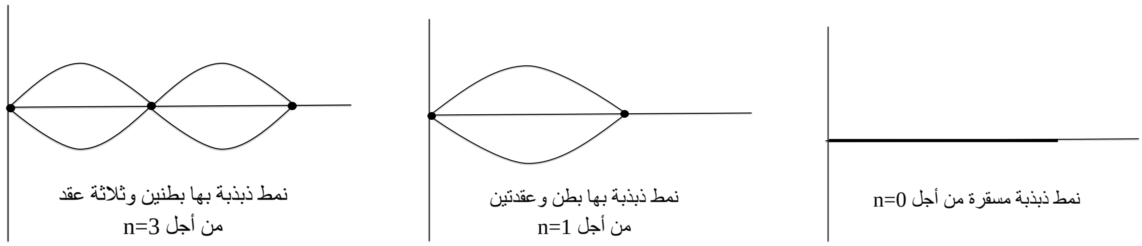
ومنه

$$\begin{cases} kL = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \\ vT = \lambda \Rightarrow T = \frac{2L}{nv} \\ f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{nv}{2L} \\ \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \frac{n\pi v}{L} \end{cases}$$

من أجل $n = 1$ و $n = 2$ نجد:

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow \lambda = 2L, \quad T = \frac{2L}{v}, \quad f = \frac{v}{2L}, \quad \omega = \frac{\pi v}{L} \\ n = 2 \Rightarrow \lambda = L, \quad T = \frac{L}{v}, \quad f = \frac{v}{L}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{L} \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد البطون n أما عدد العقد $n+1$.

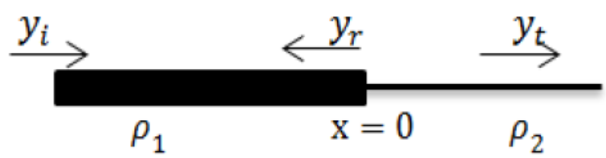


النمط الأول **النمط الثاني** **النمط الثالث**

شكل 2.7: أنماط الذبذبة

3.7 انعكاس و انكسار أمواج في حبل

نقصد بانتشار أمواج بانتقال الموجة من وسط أول إلى وسط ثاني مختلف عنه، يحدث خلال ذلك انعكاس لجزء من الأمواج و انكسار جزء آخر، ولتوضيح هذه الظاهرة نعتبر حبلين من مادتين مختلفتين أي $\rho_2 \neq \rho_1$، حيث ρ_1الكتلة الخطية للوسط الأول و ρ_2الكتلة الخطية للوسط الثاني نعتبر الحبلين مشدودين عند الفاصلة $x = 0$.



شكل 3.7: انعكاس و انكسار موجة

- **الموجة الواردة:**

$$y_i(x,t) = A_i \sin(\omega t - k_1 x)$$

- **الموجة المنعكسة:**

$$y_r(x,t) = A_r \sin(\omega t + k_1 x)$$

- **الموجة المستقرة:**

$$y_t(x,t) = A_t \sin(\omega t - k_2 x)$$

من قانون الاستمرارية

$$\begin{aligned} y_1(x,t) &= y_2(x,t) \\ y_i(x,t) + y_r(x,t) &= y_t(x,t) \end{aligned} \tag{4.7}$$

فإن العلاقة بين:

1. السعات:

$$A_i + A_r = A_t$$

2. الأعداد الموجية:

$$\frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{A_t}{A_i}$$

سلسلة الفصل السادس والسابع

التمرين الأول:

تحقق أن العبارات التالية للموجة الجيبية متوافقة:

1. $y(x,t) = A\sin 2\pi\nu(\frac{x}{v} \mp t)$

2. $y(x,t) = A\sin 2\pi(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau})$

3. $y(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t)$

التمرين الثاني:

برهن أنه إذا كان $y_1(x,t)$ و $y_2(x,t)$ حلين لمعادلة الموجة فإن مجموع $y_1(x,t)$ و $y_2(x,t)$ هو أيضا حل.

التمرين الثالث:

تعطى عبارة معادلة موجة منتشرة في وسط مادي:

$$y(x,t) = 30\sin 2\pi(\frac{x}{50} - \frac{t}{150})$$

1. أوجد سرعة الانتشار واتجاهها، الطول الموجي، التواتر، الدور والسعة لهذه الموجة.

2. السرعة الأعظمية لهذه الموجة.

3. هل تحقق $y(x,t)$ معادلة الموجة.

التمرين الرابع:

بين أن الدالة $y(z,t) = Ae^{-(3z-7t)^2}$ تمثل موجة متحركة ثم تأكد أنها تحقق معادلة موجة.

التمرين الخامس:

تعطى موجة عرضية متحركة على وتر مشدود بالعبارة:

$$y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (3x+5t)^2}$$

1. أوجد سرعة انتشار هذه الموجة واتجاهها.

2. أحسب طول الموجة.

3. أوجد عبارة السرعة العرضية لهذه الموجة v_y حيث $v_y = \partial y(x,t)/\partial t$.

4. أوجد عبارة السرعة العرضية عند اللحظة $t = 0$ و $x = 1$.

التمرين السادس:

عند نهايتين مقيدتين لحبل تلتقي موجتان احداهما واردة والأخرى منعكسة بحيث أن لهما نفس الخصائص سعة ونبض، وبانتقال في جهتين متعاكستين إذا تداخلتا الموجتان تنتج موجة مستقرة.
إذا كانت عبارة الموجة الواردة بالشكل التالي :

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - wt)$$

1. استنتج عبارة الموجة المنعكسة $y_2(x,t)$.

2. أوجد عبارة الموجة المستقرة $y(x,t)$.

3. أوجد عبارة البطون والعقد من اجل $n = 0, 1$ بدلالة λ.

الملحق

حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

سنقوم بالبحث عن حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$$\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2 q=f(t)\Rightarrow\begin{cases} f(t)=0\longrightarrow \text{معادلة متجانسة} \\ f(t)\neq 0\longrightarrow \text{معادلة غير متجانسة}\end{cases} \qquad (1)$$

1. البحث عن حل المعادلة المتجانسة

إن الحل الرياضي للمعادلة المتجانسة هو $q_h(t)$ وعليه تكتب المعادلة (1) في هذه الحالة كمايلي :

$$\ddot{q_h}+2\lambda\dot{q_h}+\omega_0^2 q_h=0 \qquad (2)$$

باسستعمال تغيير المتغير $q_h(t)=e^{st}$ فإن المعادلة (2) تصبح كالآتي:

$$s^2+2\lambda s+\omega_0^2=0 \qquad (3)$$

حل المعادلة (3) هو:

$$s^2+2\lambda s+\omega_0^2=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow q_h(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}\\ \Delta=0\Rightarrow q_h(t)=(A_1+A_2)e^{-\lambda t}\\ \Delta<0\Rightarrow\Rightarrow q_h(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_A t+\varphi)\end{cases}$$

حيث:

- A_1 ،A_2 ، A و φ تحدد من الشروط الحدية للمسألة الفيزيائية.

- $s_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

2. **البحث عن حل المعادلة غير المتجانسة إن الحل الرياضي للمعادلة غير المتجانسة هو $q(p)$ وعليه تكتب المعادلة (1) في هذه الحالة كمايلي :**

$$\ddot{q_p} + 2\lambda \dot{q_p} + \omega_0^2 q_p = f(t) \qquad (4)$$

حل المعادلة (4) هو:

$$\begin{cases} f(t) = 0 \Rightarrow q_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2} \\ f(t) = \begin{cases} f_0 e^{i\omega t} \Rightarrow q_p(t) = q_0 e^{i(\omega t+\varphi)} \\ f_0 \cos\omega t \Rightarrow q_p(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ f_0 \sin\omega t \Rightarrow q_p(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \end{cases}$$

حيث:

- $q_0 = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\lambda^2\omega^2}}$

- $\varphi = \arctan\left[\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$

المراجع

المراجع

[1] Roseau, M., Vibrations des systèmes mécaniques, Masson, Paris, 1984.

[2] N. Adnani, des vibrations à la lumière cours et applications, office publications universitaires, 1994.

[3] David Holliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Cours et exercices corrigés : physique : ondes, optique et physique moderne,6^{ime} édition, Dunod, 2004.

[4] H. J. Pain, The Physics of Vibrations and Waves, Sixth Edition, Formerly of Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK, 2005.

[5] George C.King, Vibrations and waves, Wiley, This edition first published 2009.

[6] Djelouah Hakim, Vibration et Ondes Mécaniques Cours & Exercices, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, .2012-2011

[7] S.Boudrahem, physique des vibration et des ondes mécaniques cours et exercices résolus, alger, 2013.

[8] د.بوثانة، ملخص المحاضرات : تمارين محلولة، مسائل مقترحة وامتحانات في الضوء الهندسي، الأمواج، الاهتزازات، الجزائر، 2000.

[9] هشام جبر، نظرية الاهتزازات والأمواج الميكانيكية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2006.